# KAIDAH PENCACAHAN

# MATEMATIKA UMUM KELAS XII

**PENYUSUN**
**Asmar Achmad**

**SMA Negeri 17 Makassar**

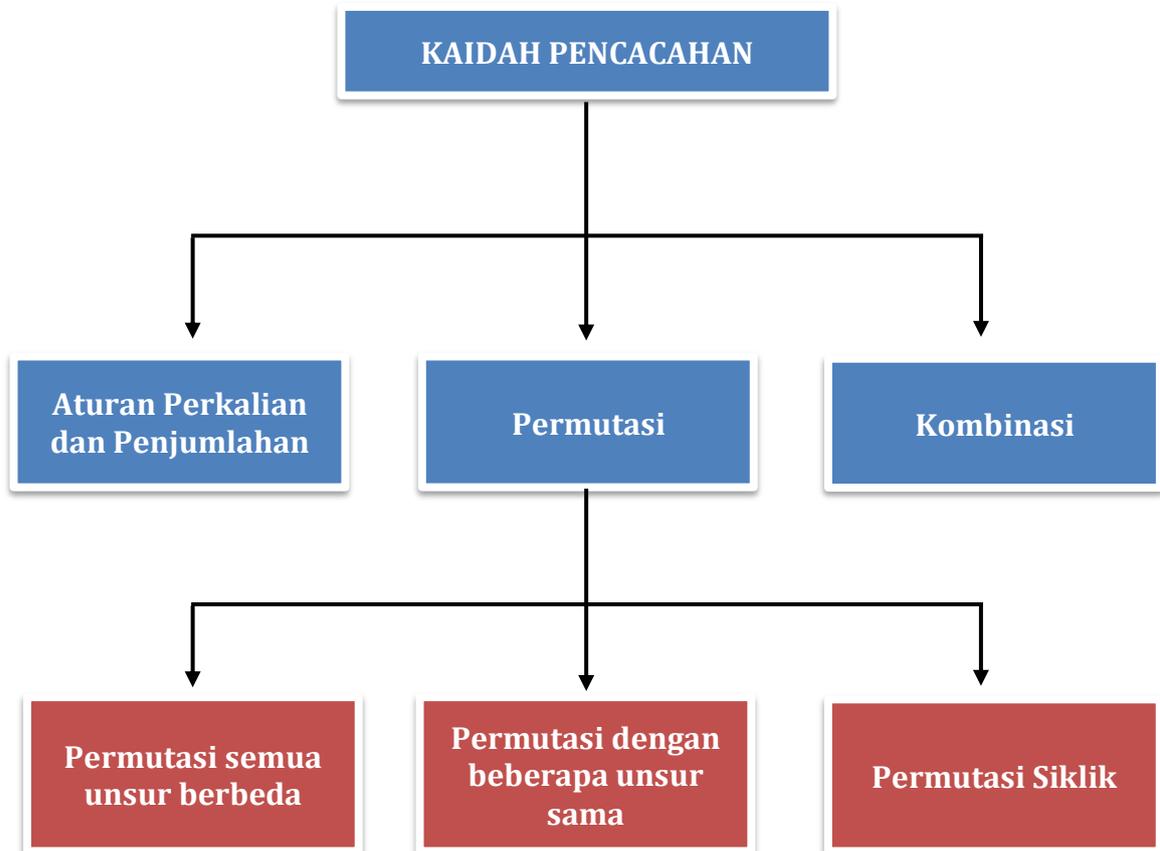
# DAFTAR ISI

PENYUSUN ..... 2
DAFTAR ISI ..... 3
GLOSARIUM ..... 4
PETA KONSEP ..... 5
PENDAHULUAN ..... 6
A. Identitas Modul ..... 6
B. Kompetensi Dasar ..... 6
C. Deskripsi Singkat Materi ..... 6
D. Petunjuk Penggunaan Modul ..... 7
E. Materi Pembelajaran ..... 7
KEGIATAN PEMBELAJARAN 1 ..... 8
ATURAN PERKALIAN DAN PENJUMLAHAN ..... 8
A. Tujuan Pembelajaran ..... 8
B. Uraian Materi ..... 8
C. Rangkuman ..... 14
D. Latihan Soal ..... 15
E. Penilaian Diri ..... 19
KEGIATAN PEMBELAJARAN 2 ..... 20
PERMUTASI ..... 20
A. Tujuan Pembelajaran ..... 20
B. Uraian Materi ..... 20
C. Rangkuman ..... 25
D. Latihan Soal ..... 26
E. Penilaian Diri ..... 29
KEGIATAN PEMBELAJARAN 3 ..... 30
KOMBINASI ..... 30
A. Tujuan Pembelajaran ..... 30
B. Uraian Materi ..... 30
C. Rangkuman ..... 33
D. Latihan Soal ..... 33
E. Penilaian Diri ..... 37
EVALUASI ..... 38
DAFTAR PUSTAKA ..... 43

# GLOSARIUM

| | | |
|---|---|---|
| **Faktorial** | : | Faktorial dari bilangan asli $n$ adalah hasil perkalian antara bilangan asli yang kurang dari atau sama dengan $n$. |
| **Kaidah pencacahan** | | kaidah yang digunakan untuk menentukan atau menghitung berapa banyak cara yang terjadi pada suatu peristiwa. |
| **Kombinasi** | : | Susunan objek tanpa memperhatikan urutan. |
| **Permutasi** | : | Susunan objek dengan memperhatikan urutan. |
| **Permutasi Siklis** | : | Susunan objek melingkar dengan memperhatikan urutan. |

# PETA KONSEP

KAIDAH PENCACAHAN
Aturan Perkalian dan Penjumlahan
Permutasi
Kombinasi
Permutasi semua unsur berbeda
Permutasi dengan beberapa unsur sama
Permutasi Siklik

# PENDAHULUAN

## A. Identitas Modul

| | | |
|---|---|---|
| Mata Pelajaran | : | Matematika Umum |
| Kelas | : | XII |
| Alokasi Waktu | : | 12 JP (3 Kegiatan Pembelajaran) |
| Judul Modul | : | Kaidah Pencacahan |

## B. Kompetensi Dasar

3.3. Menganalisis aturan pencacahan (aturan penjumlahan, aturan perkalian, permutasi, dan kombinasi) melalui masalah kontekstual.

4.3. Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan kaidah pencacahan (aturan penjumlahan, aturan perkalian, permutasi, dan kombinasi).

## C. Deskripsi Singkat Materi

Banyak masalah nyata dalam kehidupan sehari-hari yang terkait dengan kaidah pencacahan. Coba perhatikan gambar berikut, tentunya kalian tidak asing dengan gambar ini, bahkan setiap hari mungkin kalian melihatnya.

Gambar 1. Nomor Plat Kendaraan Bermotor
Sumber: Koleksi Pribadi

Nah, pernahkah kalian menemukan kode kendaraan bermotor yang sama di daerah kalian?. Tahukah kalian berapa banyak kode kendaraan bermotor di daerah kalian?. Tahukah kalian cara menghitung banyaknya kode kendaraan yang dapat dibuat di daerah kalian? di daerah lain di provisinsi kalian, atau bahkan di Indonesia? Nah, kalian akan bisa menjawab pertanyaan-pertanyaan ini dengan mempelajari materi kaidah pencacahan pada modul ini.

Kaidah pencacahan adalah bagian dari kombinatorika yang merupakan salah satu cabang dari matematika. Kaidah pencacahan merupakan aturan untuk menghitung banyaknya susunan obyek-obyek tanpa harus merinci semua kemungkinan susunannya. Saat ini, teori kombinatorika mempunyai penerapan pada bidang ilmu fisika, ilmu biologi, ilmu komputer, dan lain sebagainya yang saat ini terus berkembang dengan pesat.

Pada modul ini, kita akan membahas materi kaidah pencacahan yang terdiri atas: aturan penjumlahan dan perkalian, faktorial, permutasi, dan kombinasi.

## D. Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini dirancang untuk memfasilitasi kalian dalam melakukan kegiatan belajar secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.
3. Perhatikan contoh-contoh penyelesaian permasalahan yang disediakan dan kalau memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.
4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan kalian dengan kunci jawaban dan pembahasan pada bagian akhir modul.
5. Jika menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.
6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan kalian terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar kalian dapat mengukur penguasaan kalian terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan kalian dengan kunci jawaban yang tersedia.
8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan kalian untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

## E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **3** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Aturan Perkalian dan Penjumlahan

Kedua : Permutasi

Ketiga : Kombinasi

# KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
# ATURAN PERKALIAN DAN PENJUMLAHAN

## A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan Kalian dapat menjelaskan aturan perkalian dan penjumlahan, menganalisis aturan perkalian dan penjumlahan melalui masalah kontekstual, serta mampu menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan aturan perkalian dan penjumlahan.

## B. Uraian Materi

### 1. Aturan Perkalian

Sebelum kita membahas prinsip dasar aturan perkalian, perhatikan dua masalah berikut!

**Masalah 1.1. Melambungkan Sekeping Uang Logam dan Sebuah Dadu**

Di SMP, kalian telah mempelajari tentang ruang sampel. Banyak anggota ruang sampel dari sekeping mata uang logam ada 2, yaitu Angka dan Gambar atau bisa ditulis dengan $S_1$ = {A, G}. Banyak anggota ruang sampel dari sebuah dadu ada 6, yaitu mata dadu 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 atau bisa ditulis dengan $S_2$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

a. Ambillah sekeping mata uang logam dan sebuah dadu, kemudian lambungkan keduanya bersama-sama.
b. Catatlah hasil-hasil yang mungkin berupa pasangan berurutan. Misalnya, jika setelah melambungkan uang logam dan dadu tersebut diperoleh sisi gambar pada uang dan angka 1 pada dadu, maka ditulis dalam pasangan berurutan (A, 1).

Gambar 2. Uang Logam dan Dadu
Sumber: https://edtans.wordpress.com dan www.pngegg.com

c. Dapatkah kalian menentukan semua hasil yang mungkin berupa pasangan berurutan dari percobaan di atas?

Nah, untuk menjawab pertanyaan ini, kita membuat tabel untuk mencatat semua hasil yang mungkin dari percobaan seperti berikut ini.

| dadu / uang logam | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | (A, 1) | (A, 2) | (A, 3) | (A, 4) | (A, 5) | (A, 6) |
| G | (G, 1) | (G, 2) | (G, 3) | (G, 4) | (G, 5) | (G, 6) |

Kalau kita mendaftarnya, kita bisa menuliskan semua hasil yang mungkin sebagai anggota himpunan ruang sampel S berikut ini.

$S$ = {(A, 1), (A, 2), (A, 3), (A, 4), (A, 5), (A, 6), (G, 1), (G, 2), (G, 3), (G, 4), (G, 5), (G, 6)}

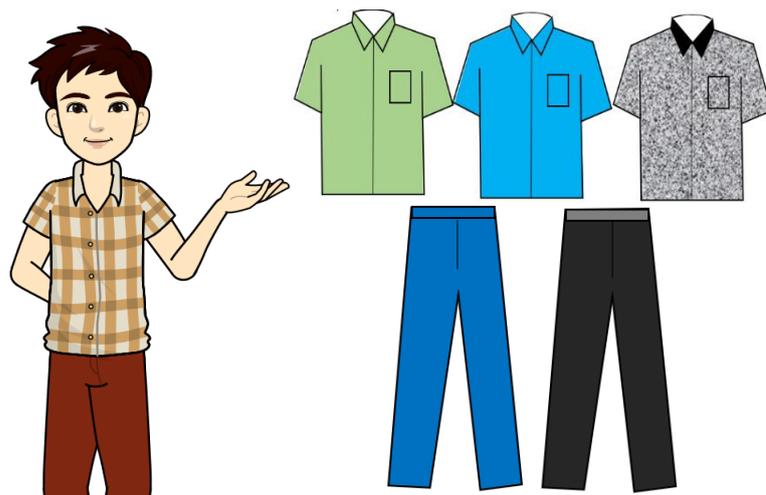
Banyak anggota dari ruang sampel $S$ atau ditulis $n(S) = 12$. Berarti banyak hasil yang mungkin dari pelambungan sekeping mata uang logam dan sebuah dadu adalah 12.

Coba kita mencari hubungan antara $n(S) = 12$ dengan banyaknya hasil yang mungkin untuk objek mata uang logam yakni $n(S_1) = 2$ dan banyaknya hasil yang mungkin untuk objek dadu yakni $n(S_2) = 6$.

Kalau kita amati secara seksama ternyata $n(S) = 12 = 2 \times 6 = n(S_1) \times n(S_2)$.

Atau $n(S)$ merupakan hasil perkalian antara banyak cara munculnya hasil yang mungkin pada sekeping mata uang logam dengan banyak cara munculnya hasil yang mungkin pada sebuah dadu.

**Masalah 1.2**

Faisal memiliki 4 baju yang berbeda warna, yaitu coklat motif kotak, hijau, biru, dan abu-abu. Dia juga mempunyai 3 celana panjang yang warnanya berbeda, yaitu coklat, biru dan hitam seperti pada gambar di bawah ini.

Gambar 3. Koleksi Baju dan Celana Panjang Faisal
Sumber: Koleksi Pribadi

Dapatkah kalian menolong Faisal untuk menentukan banyaknya stelan baju dan celana berbeda yang dapat digunakan Faisal?

Nah, untuk menjawab pertanyaan ini, kalian bisa memulai dengan mendaftar anggota ruang sampel dari himpunan baju dan celana Faisal seperti berikut ini.

- Ruang sampel baju Faisal adalah B = {coklat kotak, hijau, biru, abu-abu} atau ditulis lebih sederhana B = {ck, hj, b, a}.
- Ruang sampel celana Faisal adalah C = {coklat, biru, hitam} atau C = {ck, h}

Selanjutnya, kalian dapat membuat tabel untuk mencatat semua stelan baju dan celana berbeda seperti berikut ini.

| Celana \ Baju | coklat kotak | hijau | biru | Abu-abu |
|---|---|---|---|---|
| coklat | (ck, ck) | (ck, hj) | (ck, b) | (ck, a) |
| biru | (b, ck) | (b, hj) | (b, b) | (b, a) |
| hitam | (h, ck) | (h, hj) | (h, b) | (h, a) |

Dari tabel di atas diperoleh banyaknya stelan baju dan celana berbeda yang dapat digunakan Faisal ada 12.

Jika dihubungkan dengan banyak baju dan celana berbeda yang dimiliki Faisal, maka kita bisa menuliskan $12 = 4 \times 3 = n(B) \times n(C)$.

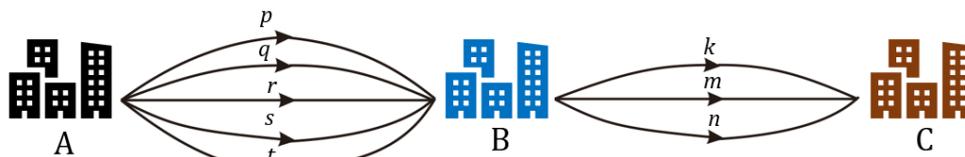
Atau banyak stelan baju dan celana berbeda yang dapat digunakan Faisal merupakan hasil perkalian antara banyak baju berbeda dengan banyak celana berbeda yang dimiliki Faisal.

Dua masalah di atas memberikan gambaran mengenai cara mencacah yang disebut **aturan perkalian**.

Secara khusus aturan perkalian berbunyi sebagai berikut.

"Jika kejadian pertama dapat terjadi dalam $m$ cara dan setiap kejadian pertama diikuti oleh kejadian kedua yang terjadi dalam $n$ cara, maka kejadian pertama dan kejadian kedua tersebut secara bersama-sama terjadi dalam $(m \times n)$ cara."

**Contoh 1.**

Diagram di bawah ini menunjukkan alur atau pilihan jalan untuk bepergian dari kota A ke kota C melalui kota B.

Gambar 4. Alur dari Kota A ke Kota C
Sumber: Koleksi Pribadi

Amir berada di kota A dan berencana bepergian ke kota C melalui kota B. Berapa banyak jalan berbeda yang dapat dilalui oleh Amir.

***Jawab***:

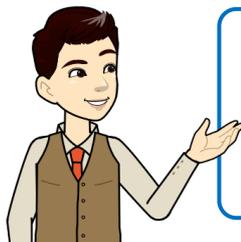
Dari kota A ke B ada 5 jalan berbeda, yaitu jalan $p$, $q$, $r$, $s$, dan $t$.
Dari kota B ke C ada 3 jalan berbeda, yaitu jalan $k$, $m$, dan $n$.
Berdasarkan aturan perkalian, dari kota A ke C melalui kota B ada $5 \times 3 = 15$ jalan berbeda.
Jadi, banyak jalan yang dapat dilalui Amir dari kota A menuju kota C melalui kota B adalah 15 jalan berbeda.

**Contoh 2.**

Pada suatu kelas akan dibentuk sebuah kepengurusan yang terdiri dari satu ketua kelas dan satu sekretaris. Ada berapa kepengurusan yang mungkin terbentuk jika ada 5 calon ketua kelas dan 6 calon sekretaris?

***Jawab***:

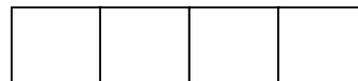
Perhitungan banyak kepengurusan kelas sebagai berikut:
Pemilihan ketua kelas = 5 kemungkinan
Pemilihan sekretaris = 6 kemungkinan
Sehingga kepengurusan yang mungkin terbentuk sebanyak 5 × 6 = 30 kemungkinan.

Untuk beberapa kejadian, aturan perkalian dapat diperluas sebagai berikut.

"Jika ada $k$ kejadian (pilihan) dengan setiap kejadian (pilihan) memiliki hasil $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ yang berbeda, maka banyak hasil berbeda yang mungkin dari $k$ kejadian (pilihan) tersebut secara berurutan diberikan oleh hasil kali : $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$".

**Contoh 3**

Dalam ruang tunggu suatu apotik terdapat 4 kursi. Ahmad, Umar, Ali dan Said sedang berada di ruang tunggu apotik tersebut. Berapa banyak cara yang berbeda keempat anak itu menduduki kursi tersebut ?

***Jawab:***

Misalkan, 4 kotak berikut menampilkan 4 kursi dalam ruang tunggu.

- Kotak (kursi) *pertama* dapat diisi dengan 4 pilihan (cara), yaitu oleh siapa saja dari keempat anak.
- Kotak *kedua* dapat diisi dengan 3 pilihan (cara), yaitu oleh siapa saja dari ketiga anak yang tersisa.
- Kotak *ketiga* dapat diisi dengan 2 pilihan (cara), yaitu oleh siapa saja dari kedua anak yang tersisa.
- Kotak *keempat* dapat diisi dengan 1 pilihan (cara), yaitu oleh anak terakhir yang tersisa.

Dengan demikian banyaknya pilihan (cara) menyusun posisi duduk sebagai berikut.

| 4 pilihan | 3 pilihan | 2 pilihan | 1 pilihan |
|---|---|---|---|

Dengan menggunakan aturan perkalian, maka banyaknya cara yang berbeda keempat anak menduduki kursi tersebut adalah : $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ cara.

## 2. Aturan Penjumlahan

Sebelum kita membahas prinsip dasar aturan penjumlahan, perhatikan dua masalah berikut!

**Masalah 2.1**
Di dalam kotak pensil terdapat 5 pulpen dan 3 pensil, berapakah banyaknya cara memilih satu pulpen atau satu pensil?

Nah, masalah ini berbeda dengan masalah yang dibahas pada aturan perkalian, mengapa demikian? Bisakah kalian melihat perbedaannya?.
Pada masalah di aturan perkalian, misalnya pada pelambungan uang logam dan dadu, dua kejadian tersebut terjadi secara bersamaan, yaitu tampilnya satu sisi pada uang logam dan mata dadu.

Pada masalah 2.1 di atas, kejadiannya adalah pilihan antara mengambil satu pulpen atau satu pensil, bukan sekaligus mengambil satu pulpen dan satu pensil. Dengan demikian hal ini berbeda dengan masalah pada aturan perkalian.

Untuk masalah 2.1 dapat kita selesaikan sebagai berikut:
- Kejadian pertama (memilih satu pulpen) dapat terjadi dengan 5 cara.
- Kejadian kedua (memilih satu pensil) dapat terjadi dengan 3 cara.

Jadi, banyaknya cara memilih satu pulpen atau satu pensil adalah 5 + 3 = 8 cara.

Masalah di atas memberikan gambaran mengenai cara mencacah yang disebut **aturan penjumlahan**.

Secara khusus aturan penjumlahan berbunyi sebagai berikut.

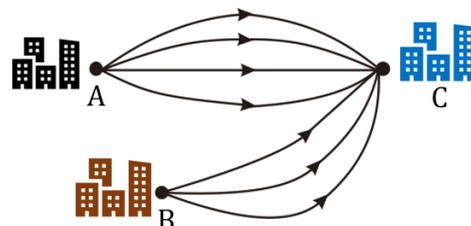
"Jika kejadian pertama dapat terjadi dalam $m$ cara dan kejadian kedua secara terpisah dapat terjadi dalam $n$ cara, maka kejadian pertama atau kejadian kedua dapat terjadi dalam $(m + n)$ cara."

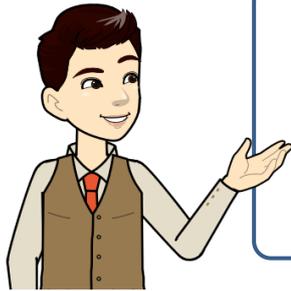
**Contoh 4.**

Ardi dan Nugroho di kota yang berbeda ingin menuju ke kota yang sama. Ardi berangkat dari kota A ke kota C dalam 4 cara, sedangkan Nugroho berangkat dari kota B ke kota C dalam 3 cara. Dalam berapa cara mereka bertemu di kota C?

***Jawab***:

Permasalahan di atas dapat diselesaikan sebagai berikut.

- Ardi berangkat dari kota A ke kota C dapat memilih 4 jalan berbeda atau 4 cara.
- Nugroho berangkat dari kota B ke kota C dapat memilih 3 jalan berbeda atau 3 cara.

Jadi, banyak cara Ardi dan Nugroho dapat bertemu di kota C adalah 4 + 3 = 7 cara.

Aturan penjumlahan dapat diperluas sebagai berikut.

"Jika kejadian pertama dapat terjadi dalam $n_1$ cara, kejadian kedua secara terpisah dapat terjadi dalam $n_2$ cara, kejadian ketiga secara terpisah dapat terjadi dalam $n_3$ cara, dan seterusnya, dan kejadian ke-$p$ secara terpisah dapat terjadi dalam $n_p$ cara, maka kejadian pertama, atau kedua, atau ketiga, ... , atau kejadian ke-$p$ dapat terjadi dalam $(n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_p)$ cara."

**Contoh 5.**

Di dalam kantong terdapat 10 kelereng berwarna merah, 7 kelereng berwarna hijau, 5 kelereng berwarna kuning, dan 3 kelereng berwarna biru. Berapakah banyaknya kemungkinan untuk mengambil satu kelereng berwarna merah atau hijau atau kuning atau biru?

***Jawab***:

Kejadian pertama (mengambil satu kelereng merah) dapat terjadi dengan 10 cara.
Kejadian kedua (mengambil satu kelereng hijau) dapat terjadi dengan 7 cara.
Kejadian kedua (mengambil satu kelereng kuning) dapat terjadi dengan 5 cara.
Kejadian kedua (mengambil satu kelereng biru) dapat terjadi dengan 3 cara.

Jadi banyaknya cara mengambil satu kelereng warna merah atau hijau atau kuning atau biru adalah 10 + 7 + 5 + 3 = 25 cara.

### 3. Definisi dan Notasi Faktorial

**Definisi**

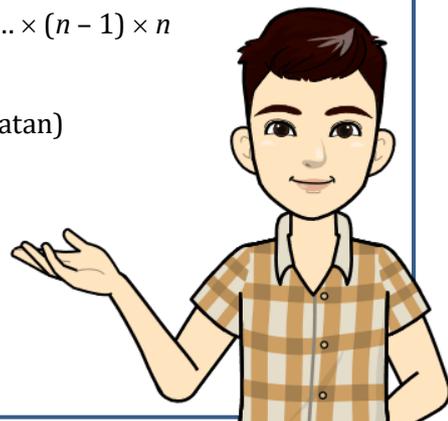
Untuk suatu $n$ bilangan asli, $n!$ (dibaca $n$ faktorial) didefinisikan sebagai:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times n$$

Hal yang perlu diketahui:

$0! = 1$ (dari percobaan dan kesepakatan)
$1! = 1$ (dari kesepakatan)
$2! = 1 \times 2 = 2 \times 1! = 2$
$3! = 1 \times 2 \times 3 = 3 \times 2! = 6$
$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4 \times 3! = 24$

Secara umum dapat ditulis:

$n! = n \times (n-1)!$

**Contoh 5.**

Hitunglah:

a. $6!$

b. $\dfrac{5!}{2!}$

c. $4! \times 3!$

d. $\dfrac{8!}{7! + 6!}$

***Jawab***:

a. $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

b. $\frac{5!}{2!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1} = \frac{120}{2} = 60$

c. $4! \times 3! = (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1) = 24 \times 6 = 144$

d. $\frac{8!}{7!\ +\ 6!} = \frac{8\times7\times6!}{7\times6!\ +\ 1\times6!}$ (ubah 8! Dan 7! ke dalam bentuk 6!)

$= \frac{8\times7\times6!}{(7+1)6!} = \frac{8\times7}{8} = 7$ (faktorkan penyebut $7\times6! + 1\times6! = (7+1)6!$ )

**Contoh 6.**

Nyatakan bentuk berikut dalam notasi faktorial

a. $4!\ (5\times 6)$
b. $8 \times 7 \times 6 \times 5$
c. $k(k-1)(k-2)$

***Jawab***:

a. $4!\ (5\times 6) = (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (5 \times 6) = 6!$

b. $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times \frac{4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1} = \frac{8!}{4!}$

c. $k(k-1)(k-2) = k(k-1)(k-2) \times \frac{(k-3)!}{(k-3)!} = \frac{k!}{(k-3)!}$

**Contoh 7.**

Sederhanakanlah penjumlahan pecahan $\frac{2}{7!} + \frac{5}{8!}$.

***Jawab***:

$\frac{2}{7!} + \frac{5}{8!} = \frac{2}{7!} \times \frac{8}{8} + \frac{5}{8!}$ (samakan penyebutnya, caranya $\frac{2}{7!} \times \frac{8}{8}$ )

$= \frac{16}{8!} + \frac{5}{8!} = \frac{21}{8!}$ (jumlahkan pembilangnya)

## C. Rangkuman

- Kaidah pencacahan merupakan aturan untuk menghitung banyaknya susunan obyek-obyek tanpa harus merinci semua kemungkinan susunannya.
- Aturan perkalian: Jika ada $k$ kejadian (pilihan) dengan setiap kejadian (pilihan) memiliki hasil $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ yang berbeda, maka banyak hasil berbeda yang mungkin dari $k$ kejadian (pilihan) tersebut secara berurutan diberikan oleh hasil kali : $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$.
- Aturan penjumlahan: Jika kejadian pertama dapat terjadi dalam $n_1$ cara, kejadian kedua secara terpisah dapat terjadi dalam $n_2$ cara, kejadian ketiga secara terpisah dapat terjadi dalam $n_3$ cara, dan seterusnya, dan kejadian ke-$p$ secara terpisah dapat terjadi dalam $n_p$ cara, maka kejadian pertama, atau kedua, atau ketiga, ... , atau kejadian ke-$p$ dapat terjadi dalam $(n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_p)$ cara.
- Untuk suatu $n$ bilangan asli, $n!$ (dibaca $n$ faktorial) didefinisikan sebagai $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$ dan $0! = 1$.

## D. Latihan Soal

1. Akan disusun nomor telepon rumah yang terdiri atas 6 angka, dengan ketentuan angka pertama tidak boleh angka 0. Tentukan banyaknya nomor telepon yang dapat dibuat dari angka-angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, jika :
   a. angka-angka boleh berulang
   b. tidak boleh ada angka yang diulang
   c. hanya angka pertama yang tidak boleh diulang.
2. Dalam suatu kelas akan diadakan pemilihan pengurus kelas yang terdiri dari ketua kelas, sekretaris dan bendahara. Apabila calon ketua kelas ada 6 orang, calon sekretaris ada 4 orang, dan calon bendahara ada 3 orang, ada berapa susunan pengurus kelas yang mungkin terbentuk ?
3. Pada suatu konferensi yang dihadiri oleh 9 negara di Asia, bendera masing-masing negara dipasang berjajar pada halaman gedung. Berapa banyak urutan bendera berbeda yang dapat dipasang dari 9 bendera tersebut ?
4. Guru Matematika memberikan ulangan harian yang terdiri atas 10 pertanyaan pilihan ganda dengan 5 pilihan (mengandung 1 jawaban benar). Budi menjawab semua soal dengan cara menebak karena ia tidak belajar. Berapa banyak carakah Budi dapat menjawab soal ulangan harian tersebut ?
5. Sebuah plat nomor mobil di suatu daerah terdiri dari sebuah huruf, diikuti empat angka, dan diakhiri sebuah huruf, di mana angka 0 tidak boleh menempati posisi pertama.
   a. Ada berapakah plat nomor mobil yang dapat dibentuk?
   b. Jika disyaratkan tidak boleh ada huruf yang sama dan tidak ada angka yang sama, maka ada berapa plat nomor yang bisa dibuat?
6. Dari 100 siswa yang mengikuti lomba kecerdasan Bahasa Indonesia dan Matematika, 60 siswa lolos seleksi Bahasa Indonesia, 50 siswa lolos seleksi Matematika, dan 30 siswa lolos seleksi kedua bidang studi tersebut. Hitung banyak siswa yang:
   a. Hanya lolos matematika
   b. Tidak lolos keduanya
7. Dua dadu bermata enam yaitu 1, 2, 3, 4, 5, 6. Hitung:
   a. Banyaknya pasangan mata dadu yang berjumlah 10.
   b. Banyaknya pasangan mata dadu yang jumlahnya paling sedikit 9.
8. Hitunglah :
   a. $\frac{15!}{10!\times 6!}$  b. $\frac{1}{7!}-\frac{2}{8!}+\frac{3}{9!}$
9. Tentukan nilai $n$ jika $n! = 56(n-2)!$
10. Buktikan bahwa : $\frac{k!(k-2)!}{(k-1)!(k-3)!} = k^2 - 2k$

## PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

1. Banyaknya nomor telepon yang terdiri atas 6 angka dengan angka 0 tidak boleh menjadi angkat pertama dapat dibuat dari angka-angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, jika:
   a. angka-angka boleh berulang
      - Angka pertama ada 9 pilihan
      - Angka kedua ada 10 pilihan
      - Angka ketiga ada 10 pilihan
      - Angka keempat ada 10 pilihan
      - Angka kelima ada 10 pilihan
      - Angka keenam ada 10 pilihan

      Jadi, banyak nomor telepon yang dapat dibuat adalah $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ = 900.000 nomor telepon.

   b. tidak boleh ada angka yang diulang
      - Angka pertama ada 9 pilihan
      - Angka kedua ada 9 pilihan
      - Angka ketiga ada 8 pilihan
      - Angka keempat ada 7 pilihan
      - Angka kelima ada 6 pilihan
      - Angka keenam ada 5 pilihan

      Jadi, banyak nomor telepon yang dapat dibuat adalah $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$ = 136.080 nomor telepon.

   c. hanya angka pertama yang tidak boleh diulang.
      - Angka pertama ada 9 pilihan
      - Angka kedua ada 9 pilihan
      - Angka ketiga ada 9 pilihan
      - Angka keempat ada 9 pilihan
      - Angka kelima ada 9 pilihan
      - Angka keenam ada 9 pilihan

      Jadi, banyak nomor telepon yang dapat dibuat adalah $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$ = 531.441 nomor telepon.

2. Ketua kelas ada 6 pilihan
   Sekretaris ada 4 pilihan
   Bendahara ada 3 pilihan
   Jadi, banyak susunan pengurus kelas yang mungkin terbentuk adalah $6 \times 4 \times 3 = 72$ susunan.

3. Disiapkan ada 9 tiang bendera.
   - Tiang pertama ada 9 pilihan bendera negara yang bisa dipasang.
   - Tiang kedua ada 8 pilihan bendera negara yang bisa dipasang.
   - Tiang ketiga ada 7 pilihan bendera negara yang bisa dipasang.
   - Tiang keempat ada 6 pilihan bendera negara yang bisa dipasang.
   - Tiang kelima ada 5 pilihan bendera negara yang bisa dipasang.
   - Tiang keenam ada 4 pilihan bendera negara yang bisa dipasang.
   - Tiang ketujuh ada 3 pilihan bendera negara yang bisa dipasang.
   - Tiang kedelapan ada 2 pilihan bendera negara yang bisa dipasang.
   - Tiang kesembilan ada 1 pilihan bendera negara yang bisa dipasang.

   Jadi, banyak urutan bendera berbeda yang dapat dipasang dari 9 bendera adalah $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ = 362.880.

4. Terdapat 10 pertanyaan pilihan ganda dengan 5 pilihan jawaban.

- Soal no.1 ada 5 cara Budi memilih jawaban
- Soal no.2 ada 5 cara Budi memilih jawaban
- Soal no.3 ada 5 cara Budi memilih jawaban
- Soal no.4 ada 5 cara Budi memilih jawaban
- Soal no.5 ada 5 cara Budi memilih jawaban
- Soal no.6 ada 5 cara Budi memilih jawaban
- Soal no.7 ada 5 cara Budi memilih jawaban
- Soal no.8 ada 5 cara Budi memilih jawaban
- Soal no.9 ada 5 cara Budi memilih jawaban
- Soal no.10 ada 5 cara Budi memilih jawaban

Jadi, banyak cara Budi dapat menjawab soal ulangan harian tersebut adalah $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^{10} = 9.765.625$ cara.

5. Diketahui plat nomor mobil terdiri dari sebuah huruf, diikuti empat angka, dan diakhiri sebuah huruf. Banyak huruf ada 26 buah dari A sampai Z, dan banyak angka ada 10 buah yaitu 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Misalkan kotak berikut mewakili plat nomor mobil.

| Huruf pertama | Angka pertama | Angka kedua | Angka ketiga | Angka keempat | Huruf terakhir |
|---|---|---|---|---|---|

   a. Banyak plat nomor mobil yang dapat dibentuk.
      - Posisi huruf pertama bisa diisi dengan 26 pilihan
      - Posisi angka pertama bisa diisi dengan 9 pilihan
      - Posisi angka kedua bisa diisi dengan 10 pilihan
      - Posisi angka ketiga bisa diisi dengan 10 pilihan
      - Posisi angka keempat bisa diisi dengan 10 pilihan
      - Posisi huruf pertama bisa diisi dengan 26 pilihan

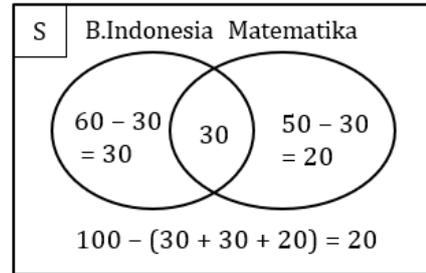
      Jadi, banyak plat nomor mobil yang dapat dibentuk adalah
      $26 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 26 = 6.084.000$ plat.

   b. Disyaratkan tidak boleh ada huruf yang sama dan tidak ada angka yang sama.
      - Posisi huruf pertama bisa diisi dengan 26 pilihan
      - Posisi angka pertama bisa diisi dengan 9 pilihan
      - Posisi angka kedua bisa diisi dengan 9 pilihan
      - Posisi angka ketiga bisa diisi dengan 8 pilihan
      - Posisi angka keempat bisa diisi dengan 7 pilihan
      - Posisi huruf pertama bisa diisi dengan 25 pilihan

      Jadi, banyak plat nomor mobil yang dapat dibentuk adalah
      $26 \times 9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 25 = 2.948.400$ plat.

6. Diketahui 100 siswa yang mengikuti lomba kecerdasan Bahasa Indonesia dan Matematika, 60 siswa lolos seleksi Bahasa Indonesia, 50 siswa lolos seleksi Matematika, dan 30 siswa lolos seleksi kedua bidang studi tersebut.

Dengan diagram Venn dapat diperoleh:
Berdasarkan diagram Venn di samping, diperoleh:

a. Siswa yang lolos matematika sebanyak 50 – 30 = 20 siswa.
b. Siswa yang tidak lolos keduanya sebanyak 100 – (30 + 30 + 20) = 100 – 80 = 20 siswa

7. Diketahui dua dadu bermata enam yaitu 1, 2, 3, 4, 5, 6.
   a. Banyaknya pasangan mata dadu yang berjumlah 10.
      Pasangan mata dadu berjumlah 10 adalah {(4, 6), (5, 5), (6, 4)}
      Jadi, banyaknya pasangan mata dadu yang berjumlah 10 ada 3 pasangan.
   b. Banyaknya pasangan mata dadu yang jumlahnya paling sedikit 9, berarti pasangan mata dadu berjumlah 9 atau berjumlah 10 atau berjumlah 11 atau berjumlah 12.
      - Pasangan mata dadu berjumlah 9 adalah {(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)} ada 4 pasangan
      - Pasangan mata dadu berjumlah 10 adalah {(4, 6), (5, 5), (6, 4)} ada 3 pasangan
      - Pasangan mata dadu berjumlah 11 adalah {(5, 6), (6, 5)} ada 2 pasangan
      - Pasangan mata dadu berjumlah 12 adalah {(6, 6)} ada 1 pasangan

      Jadi, banyaknya pasangan mata dadu yang jumlahnya paling sedikit 9 adalah

      4 + 3 + 2 + 1 = 10 pasangan.

8. a. $\frac{15!}{10!\times 6!} = \frac{15\times 14\times 13\times 12\times 11\times 10!}{10!\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1} = \frac{15\times 14\times 13\times 12\times 11}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1} = \frac{7\times 13\times 11}{2} = 500{,}5$

   b. $\frac{1}{7!} - \frac{2}{8!} + \frac{3}{9!} = \frac{72}{9!} - \frac{18}{9!} + \frac{3}{9!} = \frac{72 - 18 + 3}{9!} = \frac{57}{9!} = \frac{57}{362880} = \frac{19}{120960}$

9. $n! = 56(n-2)!$

   $n(n-1)(n-2)! = 56(n-2)!$

   $n(n-1) = 56 = 8\times 7$

   Berarti nilai $n = 8$

10. $\frac{k!(k-2)!}{(k-1)!(k-3)!} = \frac{k(k-1)!(k-2)(k-3)!}{(k-1)!(k-3)!}$

    $= k.(k-2)$

    $= k^2 - 2k$

    Jadi, terbukti bahwa $\frac{k!(k-2)!}{(k-1)!(k-3)!} = k^2 - 2k$

## E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang Kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

| No | Pertanyaan | Ya | Tidak |
|---|---|---|---|
| 1 | Apakah Kalian tahu yang dimaksud aturan perkalian? | ◯ | ◯ |
| 2 | Apakah Kalian tahu yang dimaksud aturan penjumlahan? | ◯ | ◯ |
| 3 | Apakah Kalian tahu yang dimaksud dengan faktorial? | ◯ | ◯ |
| 4 | Apakah Kalian dapat menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan aturan perkalian? | ◯ | ◯ |
| 5 | Apakah Kalian dapat menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan aturan penjumlahan? | ◯ | ◯ |
| 6 | Apakah Kalian dapat menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan konsep faktorial? | ◯ | ◯ |
| JUMLAH | | | |

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

# KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
# PERMUTASI

## A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan Kalian dapat menjelaskan konsep permutasi, menganalisis permutasi melalui masalah kontekstual, serta mampu menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan permutasi.

## B. Uraian Materi

Misalkan pada suatu lomba cerdas cermat yang diikuti oleh 3 regu (regu A, regu B, dan regu C) hanya menyediakan 2 macam hadiah saja yakni hadiah I dan hadiah II. Ada berapa kemungkinan pasangan pemenang hadiah-hadiah itu?

Berdasarkan jawaban di atas ternyata diperoleh bahwa terdapat 6 pasangan yang mungkin menjadi pemenang tebak tepat, yaitu (A, B), (A,C), (B, A), (B,C), (C, A), dan (C, B). Perhatikan bahwa (A, B)≠(B, A), (B, C)≠(C, B), dan seterusnya. (Mengapa?) Apa arti (A, B) dan (B, A)?

Untuk menjawab pertanyaan di atas ternyata urutan diperhatikan. Oleh karena itu, susunan yang demikian ini dinamakan dengan permutasi. Sekarang coba cari hubungan yang dapat diperoleh dari informasi pada masalah di atas bagaimana dapat menghasilkan 6 pasangan yang mungkin jadi pemenang.

**Pengertian**

"Diberikan sebanyak $n$ unsur berbeda. Sebuah permutasi $k$ unsur dari $n$ unsur berbeda adalah sebuah jajaran dari $k$ unsur yang urutannya diperhatikan."

Perhatikan huruf-huruf A, B, C, dan D.

- BDCA, DCBA, dan ACDB merupakan contoh permutasi-permutasi dari 4 huruf.
- BAD, ADB, dan BCA merupakan contoh permutasi-permutasi 3 huruf dari 4 huruf yang diketahui.
- AD, CB, DA, dan BD merupakan contoh permutasi-permutasi 2 huruf dari 4 huruf yang diketahui.

Coba tentukan permutasi 4 huruf, 3 huruf, dan 2 huruf lainnya dari huruf A, B, C, D.

### 1. Permutasi dengan Semua Unsur Berbeda

Banyaknya permutasi $r$ unsur dari $n$ yang berbeda diberi notasi P($n$, $r$).

**Teorema 1**

Jika $n$ dan $r$ adalah dua bilangan bulat positif dan $r \leq n$, maka banyaknya permutasi $r$ unsur dari $n$ unsur berbeda tanpa pengulangan, diberi notasi P($n$, $r$) adalah:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Banyaknya permutasi $n$ unsur dari $n$ unsur berbeda adalah P($n$, $n$) = $n$!

**Contoh 1.**

Tentukan banyaknya susunan 4 huruf berbeda yang dapat diperoleh dari kata MENTARI.

**Jawab**:

Kata MENTARI terdiri atas 7 huruf yang berbeda.
Banyaknya susunan 4 huruf berbeda yang dapat diperoleh dari 7 huruf berbeda tersebut merupakan permutasi $r = 4$ dari $n = 7$ huruf atau P(7, 4).
Jadi banyaknya susunan huruf yang dapat dibuat adalah

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P(7,4) = \frac{7!}{(7-4)!}$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}}$$

$$= 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

Ingat kembali definisi faktorial di KP 1,
$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
atau $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!$

Jadi, banyak susunan 4 huruf berbeda dari kata MENTARI adalah 840.

**Contoh 2.**

Dalam berapa cara, 6 buku pelajaran berbeda dapat disusun pada sebuah rak buku?

***Jawab***:

Banyaknya cara menyusun keenam buku pelajaran yang berbeda merupakan permutasi 6 unsur dari 6 unsur atau P(6, 6).
Dengan rumus $P(n, n) = n!$ ,
diperoleh $P(6, 6) = 6!$
$= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
$= 720$
Jadi, banyaknya cara menyusun 6 buku pelajaran yang berbeda pada rak buku adalah 720 cara.

**Permutasi dengan Pembatasan (Semua Unsur Berbeda)**

Kadang-kadang kita menemukan pembatasan dalam pemilihan penyusunan unsur-unsur tertentu. Untuk masalah seperti ini, terlebih dahulu kita selesaikan pembatasannya, kemudian baru kita gunakan kaidah pencacahan.

**Contoh 3.**

Diketahui 5 mobil berbeda dan 4 motor berbeda yang sedang diparkir berbaris. Berapa banyak carakah barisan kendaraan ini dapat dibentuk dengan urutan kendaraan yang berbeda?

Tentukan juga banyak cara barisan berbeda dapat dibentuk jika :

a. dua motor harus ada di depan
b. satu mobil di depan dan satu motor di belakang.
c. mobil harus berkelompok
d. tidak boleh dua mobil berdekatan

***Penyelesaian :***

Jika mobil dan motor tidak dibedakan, maka terdapat 9 unsur berbeda (dari 5 mobil dan 4 motor). Jadi, Banyak cara membentuk barisan kendaraan dengan urutan yang berbeda adalah permutasi 9 unsur dari 9 unsur atau P(9, 9).

P(9, 9) = 9!

$= 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

= 362.880 cara.

Berikutnya kita akan menentukan permutasi dari susunan mobil dan motor dengan beberapa pembatasan. Misalkan MT = motor dan MB = mobil.

a. Dua motor harus ada di depan

| MT | MT | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

- Dua kotak (tempat) pertama diisi dengan 2 motor yang dipilih dari 4 motor yang tersedia.

  Banyak cara memilih 2 motor dari 4 motor tersebut adalah P(4, 2)

$$P(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!}$$

$$= \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!}$$

$= 4 \times 3 = 12$

- Sisa 7 kotak (tempat) lainnya, dapat diisi dengan 7 kendaraan yang tersisa. Ini adalah $P(7, 7) = 7!$

Dengan aturan perkalian, maka banyak cara dua motor harus ada di depan adalah

$12 \times 7! = 12 \times 5.040 = 60.480$

Jadi, banyak cara barisan berbeda dapat dibentuk jika dua motor harus ada di depan adalah 60.480 cara.

b. Satu mobil di depan dan satu motor di belakang

| MB | | | | | | | | MT |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

- Kotak pertama harus diisi mobil, dapat diisi dengan mobil mana saja dari 5 mobil yang ada, jadi kotak pertama dapat diisi dengan 5 cara.
- Kotak terakhir harus diisi motor, dapat diisi dengan motor mana saja dari 4 motor yang ada, berarti kotak terakhir dapat diisi dengan 4 cara.
- Sisa 7 kotak yang dapat diisi dengan 7 kendaraan yang tersisa, berarti $P(7, 7) = 7!$.

Dengan aturan perkalian, maka banyaknya cara menyusun agar satu mobil di depan dan satu motor di belakang adalah $5 \times 7! \times 4 = 20 \times 5.040 = 100.800$

Jadi, banyak cara barisan berbeda dapat dibentuk jika satu mobil di depan dan satu motor di belakang adalah 60.480 cara.

c. Mobil harus berkelompok

- Agar mobil (5 mobil) berkelompok, maka kita memblok dan menganggapnya sebagai satu unsur. Dalam blok ini, kelima mobil dapat dipertukarkan dalam $P(5, 5) = 5!$ cara.
- Kemudian blok mobil ini beserta 4 motor membentuk 5 unsur yang juga dapat dipertukarkan dalam $P(5, 5) = 5!$ cara.

Dengan menggunakan aturan perkalian, banyaknya cara menyusun agar mobil berkelompok adalah $5! \times 5! = 120 \times 120 = 14.400$.

Jadi, banyak cara barisan berbeda dapat dibentuk mobil harus berkempok adalah 14.400 cara.

d. Tidak boleh dua mobil berdekatan

Supaya mobil tidak berdekatan, maka posisi mobil dan motor haruslah berselang-seling seperti ilustrasi berikut.

| MB | MT | MB | MT | MB | MT | MB | MT | MB |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

- Kelima posisi mobil dapat dipertukarkan dalam $P(5, 5) = 5!$ cara.
- Keempat posisi motor dapat dipertukarkan dalam $P(4, 4) = 4!$ cara.

Dengan menggunakan aturan perkalian, banyaknya cara menyusun agar tidak boleh dua mobil berdekatan adalah $5! \times 4! = 120 \times 24 = 2.880$

### 2. Permutasi dengan Beberapa Unsur yang Sama

**Teorema 2**

Banyaknya permutasi dari $n$ unsur yang terdiri dari $m_1$ unsur jenis pertama sama, $m_2$ unsur jenis kedua sama, $m_3$ unsur jenis ketiga sama, ..., dan $m_k$ unsur jenis ke–$k$ sama ditentukan dengan

$$P = \frac{n!}{m_1!\ x\ m_2!\ x\ m_3!\ x\ ...\ x\ m_k!}$$

dimana $m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_k = n$.

**Contoh 4.**

Berapa banyak permutasi dari huruf-huruf pada kata MATEMATIKA ?

***Jawab***:

Banyak huruf pada kata MATEMATIKA ada 10 buah. Terdapat unsur yang sama, yaitu:

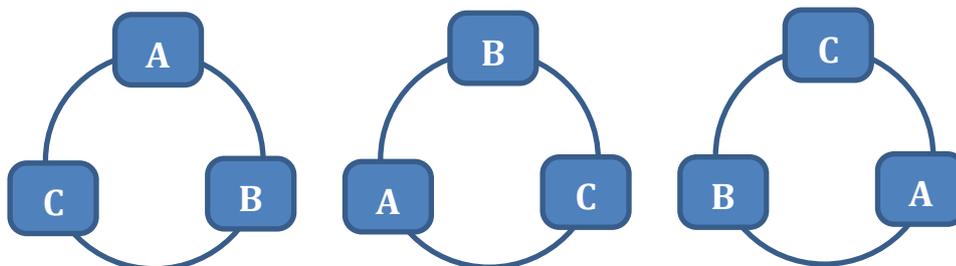
- huruf M ada 2 buah,
- huruf A ada 3 buah,
- huruf T ada 2 buah.
- huruf E, I, dan K masing-masing 1 buah.

Maka banyaknya permutasi dari huruf-huruf tersebut adalah

$$P = \frac{10!}{2!\ x\ 3!\ x\ 2!\ x\ 1!\ x\ 1!\ x\ 1!} = \frac{10 \text{ x } 9 \text{ x } 8 \text{ x } 7 \text{ x } 6 \text{ x } 5 \text{ x } 4 \text{ x } 3!}{2\ x\ 3!\ x\ 2\ x\ 1\ x\ 1\ x\ 1} = 151.200.$$

### 3. Permutasi Siklik

Perhatikan bahwa permutasi yang kita bicarakan di atas adalah permutasi yang objek-objeknya dijajar atau disusun pada satu garis. Permutasi demikian ini dinamakan permutasi linear. Namun, jika objek-objek tersebut dijajar/disusun melingkar (pada suatu lingkaran) dan arah melingkarnya diperhatikan, misalnya searah putaran jarum jam, maka permutasi yang demikian dinamakan permutasi siklik.

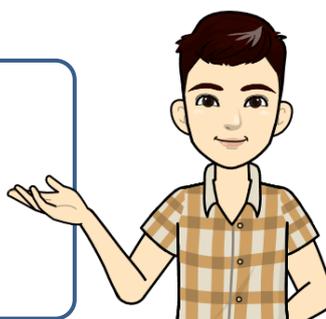
Coba kalian perhatikan gambar berikut.

Tiga objek A, B, dan C di atas disusun secara melingkar. Walaupun nampak berbeda, namun jika dilihat dari urutan (searah jarum jam misalnya) maka ketiga susunan ini adalah sama.

Jadi, dari tiga buah permutasi linear ABC, BCA, dan CAB diperoleh hanya satu permutasi siklik (ABC). Demikian juga untuk tiga permutasi linear ACB, CBA, dan BAC diperoleh hanya satu permutasi siklik (ACB). Dengan demikian terdapat dua permutasi-3 siklik dari tiga objek A, B, dan C, yaitu (ABC) dan (ACB).

Selanjutnya secara umum, jika pengulangan tidak diperkenankan, hubungan antara banyaknya permutasi siklik dan banyaknya permutasi linear dinyatakan dalam teorema berikut.

**Definisi Permutasi Siklik**

Banyaknya permutasi untuk $n$ unsur berbeda yang diatur dalam sebuah lingkaran disebut permutasi siklik. Permutasi siklik dari $n$ unsur ($n$ > 1) ditentukan oleh rumus:

$$P_s(n) = (n - 1)!$$

**Contoh 5.**

6 orang manager perusahaan duduk mengelilingi sebuah meja berbentuk melingkar untuk mengadakan rapat. Berapa banyak cara mereka dapat duduk mengelilingi meja rapat tersebut dengan urutan yang berbeda?

**Jawab**:

Banyaknya cara agar 6 orang manager dapat duduk mengelilingi meja rapat sama dengan permutasi melingkar dari 6 unsur, yaitu

$$P_s(6) = (6 - 1)! = 5!$$
$$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Jadi, banyak cara 6 orang manager perusahaan dapat duduk mengelilingi meja rapat tersebut dengan urutan yang berbeda adalah 120 cara.

**Contoh 6.**

Satu keluarga terdiri dari ayah, ibu, dan 4 orang anaknya. Mereka duduk di meja makan yang bentuknya melingkar. Ada berapa cara anggota keluarga tersebut duduk mengelilingi meja jika ayah dan ibu selalu duduk berdampingan?

***Jawab***:

- Syarat khusus, ayah dan ibu selalu duduk berdampingan. Posisinya dapat dipertukarkan sebanyak 2! = 2 cara.
- Ayah dan ibu selalu duduk berdampingan, sehingga posisi ini diblok dan dianggap 1 unsur. Blok (ayah dan ibu) dan 4 orang anaknya menjadi 5 unsur yang duduk melingkar, sehingga dengan permutasi siklik diperoleh:

$$P_s(5) = (5 - 1)! = 4!$$
$$= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Dengan Aturan perkalian diperoleh banyak cara anggota keluarga duduk mengelilingi meja jika ayah dan ibu selalu duduk berdampingan adalah $2 \times 24 = 48$ cara.

## C. Rangkuman

- Permutasi $k$ unsur dari $n$ unsur berbeda adalah sebuah jajaran dari $k$ unsur yang urutannya diperhatikan.
- Jika $n$ dan $r$ adalah dua bilangan bulat positif dan $r \leq n$, maka banyaknya permutasi $r$ unsur dari $n$ unsur berbeda tanpa pengulangan, diberi notasi $P(n, r)$ adalah:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- Banyaknya permutasi $n$ unsur dari $n$ unsur berbeda adalah $P(n, n) = n!$.
- Banyaknya permutasi dari $n$ unsur yang terdiri dari $m_1$ unsur jenis pertama sama, $m_2$ unsur jenis kedua sama, $m_3$ unsur jenis ketiga sama, …, dan $m_k$ unsur jenis ke–$k$ sama ditentukan dengan

$$P = \frac{n!}{m_1!\ x\ m_2!\ x\ m_3!\ x\ \dots\ x\ m_k!}$$

  dimana $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_k = n$.

- Banyaknya permutasi untuk $n$ unsur berbeda yang diatur dalam sebuah lingkaran disebut permutasi siklik. Permutasi siklik dari $n$ unsur ($n > 1$) ditentukan oleh rumus $P_s(n) = (n - 1)!$

## D. Latihan Soal

1. Seorang kandidat presiden hanya dapat mengunjungi enam provinsi dari sepuluh provinsi yang ingin dikunjunginya. Berapa banyak cara dengan urutan berbeda, ia dapat mengunjungi provinsi-provinsi itu?
2. Bilangan terdiri dari 4 angka disusun dari angka-angka 1, 2, 3, 5, 6, dan 7. Hitung banyak susunan bilangan dengan angka-angka yang berlainan (angka-angkanya tidak boleh berulang).
3. Pada suatu pameran karya seni, lukisan-lukisan ditempatkan pada satu baris. Dengan berapa cara penempatan lukisan dapat dilakukan jika ada 10 lukisan yang dipamerkan?
4. Terdapat 4 buku matematika, 3 buku fisika, dan 5 buku kimia yang berbeda akan disusun ke dalam rak yang dapat memuat semua buku. Berapa susunan yang mungkin jika:
   a. buku yang sejenis saling berdampingan
   b. buku-buku fisika saja yang saling berdampingan
5. Berapa banyak permutasi dari huruf-huruf pada kata STATISTIKA?
6. Pada suatu ruas jalan dipasang lampu hias yang terdiri dari 3 bohlam kuning, 6 bohlam merah, dan 4 bohlam hijau. Tentukan banyaknya cara memasang lampu hias tersebut jika bohlam berwarna sama tidak dapat dibedakan?
7. Tujuh orang duduk mengelilingi meja bundar. Berapa banyaknya susunan duduk yang berbeda dari ketujuh orang itu?
8. Dengan berapa cara 5 anak laki-laki dan 3 anak perempuan dapat disusun pada suatu lingkaran jika anak perempuan selalu berdekatan (berkumpul)?

## PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

1. Mengunjungi 6 provinsi dari 10 provinsi merupakan permutasi P(10, 6).

   $$P(10,6) = \frac{10!}{(10-6)!}$$
   $$= \frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\ \times 5\ \times 4!}{4!}$$
   $$= 10\times 9\times 8\times 7\ \times 6\ \times 5 = \ 151.200$$

   Jadi, banyak cara dengan urutan berbeda, kandidat presiden mengunjungi 6 provinsi dari 10 provinsi adalah 151.200 cara.

2. Bilangan terdiri dari 4 angka disusun dari angka-angka 1, 2, 3, 5, 6, dan 7. Banyak susunan bilangan dengan angka-angka yang berlainan (angka-angkanya tidak boleh berulang) merupakan permutasi 4 angka dari 6 angka.

   $$P(6,4) = \frac{6!}{(6-4)!}$$
   $$= \frac{6\ \times 5\ \times\ 4\ \times 3\times 2!}{2!}$$
   $$= 6\times 5\times 4\times 3\ =\ 360$$

   Jadi, banyak susunan bilangan dengan angka-angka yang berlainan (angka-angkanya tidak boleh berulang) adalah 360 susunan.

3. Banyak cara penempatan10 lukisan yang akan dipamerkan dalam satu baris adalah
   P(10, 10) = 10!
   $= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
   = 3.628.800 cara.

4. Terdapat 4 buku matematika, 3 buku fisika, dan 5 buku kimia yang berbeda akan disusun ke dalam rak yang dapat memuat semua buku.

   a. Banyak susunan jika buku yang sejenis saling berdampingan

      Jika buku yang sejenis berdampingan, maka buku yang sejenis tersebut dikelompokkan dalam satu blok dan dianggap sebagai 1 unsur.
      - 4 buku matematika diblok dan dapat disusun dalam bloknya sebanyak P(4, 4) = 4! = $4 \times 3 \times 2 \times 1$ = 24 cara.
      - 3 buku fisika diblok dan dapat disusun dalam bloknya sebanyak P(3, 3) = 3! = $3 \times 2 \times 1$ = 6 cara.
      - 5 buku kimia diblok dan dapat disusun dalam bloknya sebanyak P(5, 5) = 5! = $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ = 120 cara.
      - 3 blok buku sejenis tersebut membentuk 3 unsur yang dapat disusun sebanyak P(3, 3) = 3! = $3 \times 2 \times 1$ = 6 cara.

      Jadi, banyak susunan jika buku yang sejenis saling berdampingan adalah
      $24 \times 6 \times 120 \times 6$ = 103.680 cara

   b. Banyak susunan jika buku fisika saja yang saling berdampingan

      - 3 buku fisika berdampingan, berarti buku fisika dikelompokkan dalam satu blok dan dapat disusun dalam bloknya sebanyak P(3, 3) = 3! = $3 \times 2 \times 1$ = 6 cara.
      - 9 buku yang lainnya (matematika dan kimia) dan 1 blok buku fisika membentuk 10 unsur yang dapat disusun sebanyak P(10, 10) = 10! = 3.628.800 cara.

Jadi, banyak susunan jika buku fisika saja yang berdampingan adalah
$6 \times 3.628.800 = 21.772.800$ cara.

5. Banyak huruf pada kata STATISTIKA ada 10 buah. Terdapat unsur yang sama, yaitu:
    - huruf S ada 2 buah,
    - huruf T ada 3 buah,
    - huruf A ada 2 buah,
    - huruf I ada 2 buah,
    - huruf K ada 1 buah.

    Maka banyaknya permutasi dari huruf-huruf tersebut adalah

    $$P = \frac{10!}{2! \times 3! \times 2! \times 2! \times 1!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3! \times 2 \times 2} = 10 \times 9 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$$

    $= 75.600.$

6. Terdapat 13 bola lampu hias dengan 3 jenis warna.
    - Bohlam kuning ada 3 buah
    - Bohlam merah ada 6 buah
    - Bohlam hijau ada 4 buah

    Banyaknya cara memasang lampu hias tersebut adalah

    $$P = \frac{13!}{3! \times 6! \times 4!} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3 \times 2 \times 1 \times 6! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 13 \times 12 \times 11 \times 5 \times 7 = 60.060.$$

7. Banyaknya susunan duduk yang berbeda dari 7 orang yang mengelilingi meja bundar merupakan permutasi siklik dari 7 unsur, yaitu

    $P_s(7) = (7 - 1)! = 6!$

    $= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

8. Syarat khusus, 3 anak perempuan selalu berdekatan. Posisinya dapat dipertukarkan sebanyak P(3, 3) = 3! = 6 cara.

    3 anak perempuan selalu berdekatan, sehingga posisi ini diblok dan dianggap 1 unsur. Blok (3 anak perempuan) dan 5 anak laki-laki menjadi 6 unsur yang disusun melingkar, sehingga dengan permutasi siklik diperoleh:

    $P_s(6) = (6 - 1)! = 5!$

    $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

    Dengan Aturan perkalian diperoleh banyak cara 5 anak laki-laki dan 3 anak perempuan disusun pada suatu lingkaran dimana anak perempuan selalu berdekatan (berkumpul) adalah $6 \times 120 = 720$ cara.

## E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang Kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

| No | Pertanyaan | Ya | Tidak |
|---|---|---|---|
| 1 | Apakah Kalian tahu yang dimaksud permutasi? | ○ | ○ |
| 2 | Apakah Kalian tahu yang dimaksud permutasi dengan pembatasan? | ○ | ○ |
| 3 | Apakah Kalian tahu yang dimaksud dengan permutasi siklis? | ○ | ○ |
| 4 | Apakah Kalian dapat menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan konsep permutasi? | ○ | ○ |
| 5 | Apakah Kalian dapat menyelesaikan permasalahan yang terkait permutasi dengan pembatasan? | ○ | ○ |
| 6 | Apakah Kalian dapat menyelesaikan permasalahan yang terkait permutasi siklis? | ○ | ○ |
| JUMLAH | | | |

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

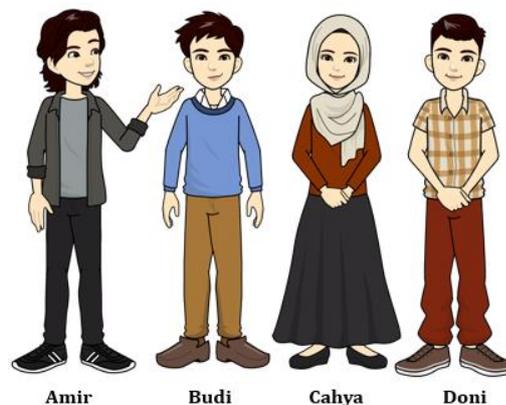
# KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
# KOMBINASI

## A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini diharapkan Kalian dapat menjelaskan konsep kombinasi, menganalisis kombinasi melalui masalah kontekstual, serta mampu menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan kombinasi.

## B. Uraian Materi

### 1. Kombinasi

Misalkan dari 4 bersaudara Amir (A), Budi (B), Cahya (C), dan Doni (D) diundang 2 orang wakilnya untuk rapat keluarga. Ada berapa cara undangan itu dapat dipenuhi? Bagaimana pula jika yang diundang adalah 3 orang dari 4 bersaudara itu?

Dari permasalahan di atas diperoleh bahwa objek eksperimennya adalah O = {A, B, C, D} sedangkan eksperimennya adalah mengundang hadir dalam rapat keluarga sebanyak 2 orang wakilnya.

Jika rapat keluarga itu yang diundang 2 orang, maka apakah arti dari (A, B) dan (B, A)? Apakah (A, B) = (B, A)?
Demikian juga, jika rapat keluarga itu yang diundang 3 orang, maka apakah arti dari (C, A, D) dan (A, C, D)? Apakah (C, A, D) = (A, C, D)?

Nah, ternyata untuk permasalahan di atas, (A, B) = (B, A), karena jika yang hadir Amir dan Budi, tentunya sama saja jika yang hadir Budi dan Amir. Demikian juga (C, A, D) = (A, C, D).

Untuk menjawab pertanyaan di atas ternyata urutan tidak diperhatikan. Susunan yang demikian ini dinamakan dengan kombinasi. Sekarang coba cari hubungan yang dapat diperoleh dari informasi pada masalah di atas, jika rapat keluarga itu yang diundang 2 orang, maka banyaknya pasangan anggota keluarga yang mungkin ikut rapat ada 6.

**Pengertian**

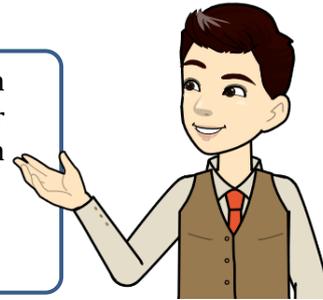
"Diberikan sebanyak *n* unsur berbeda. Sebuah kombinasi *k* unsur dari *n* unsur berbeda adalah sebuah jajaran dari *k* unsur yang urutannya tidak diperhatikan."

Untuk lebih memahami pengertian ini, perhatikan huruf-huruf A, B, C, dan D.

a. ABC, ABD, ACD, dan BCD merupakan kombinasi 3 huruf dari 4 huruf yang diketahui tanpa pengulangan.
b. AAB, ABB, ACC, dan BDD merupakan kombinasi-3 huruf dari 4 huruf yang diketahui dengan pengulangan. (Coba cari kombinasi lainnya selain 4 kombinasi tersebut!)
c. AD, CB, AB, dan BD merupakan kombinasi-kombinasi-2 huruf dari 4 huruf yang diketahui. (Coba cari kombinasi lainnya selain 4 kombinasi tersebut!)

**Teorema**

Misalkan $n$ dan $k$ bilangan bulat non negatif dengan $k \leq n$. Banyaknya kombinasi $k$ unsur dari $n$ unsur berbeda *tanpa pengulangan* ditentukan dengan rumus:

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Contoh 1.**

Dalam suatu ujian, setiap siswa diharuskan menjawab 4 soal dari 7 soal yang disediakan. Jika seorang siswa memilih secara acak soal yang akan dikerjakannya, berapa banyak cara atau pilihan untuk mengerjakan soal ujian tersebut ?

***Jawab***:

Dalam kasus di atas, urutan nomor-nomor soal diabaikan. Sehingga banyaknya cara untuk menngerjakan 4 soal dari 7 soal ujian adalah kombinasi 4 soal dari 7 soal, sehingga diperoleh:

$$C(7,\ 4) = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} = \frac{7!}{4!\,.3!}$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!\,.3 \times 2 \times 1} = 35$$

Jadi, banyak cara untuk mengerjakan soal ujian tersebut adalah 35 cara.

**Contoh 2.**

Sebuah kontingen Olimpiade Matematika yang terdiri atas 5 siswa akan dipilih dari 6 siswa putra dan 4 siswa putri. Tentukan banyak cara kontingen ini dapat dibentuk jika:

a. tidak ada pembatasan (tidak dibedakan antara putra dan putri)
b. kontingen memiliki tepat 2 siswa putra
c. kontingen memiliki paling sedikit 1 siswa putri

***Jawab** :*

Masalah ini termasuk masalah kombinasi, karena urutan pemilihan siswa tidak diperhatikan (tidak dipentingkan).

a. tidak ada pembatasan
   Jumlah siswa tanpa membedakan putra dan putri adalah 6 + 4 = 10. dari 10 siswa tersebut akan dipilih 5 siswa, sehingga banyak cara membentuk kontingen adalah

$$C(10,\ 5) = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10!}{5!.5!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!\,.5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 252 \text{ cara.}$$

b. kontingen memiliki tepat 2 siswa putra

2 siswa putra dapat dipilih dari 6 siswa putra, dengan banyaknya cara memilihnya adalah $C(6, 2)$.
Kontingen terdiri dari 5 siswa, berarti masih tersedia 3 tempat yang harus diisi oleh siswa putri. Banyaknya cara memilih 3 siswa putri dari 4 siswa putri adalah $C(4, 3)$.
Dengan aturan perkalian, banyaknya cara membentuk kontingen yang memiliki tepat 2 siswa putra adalah

$$C(6,2) \times C(4,3) = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} \times \frac{4!}{3!\,(4-3)!}$$

$$= \frac{6!}{2!.4!} \times \frac{4!}{3!.1!}$$

$$= \frac{6\times5\times4!}{2\times1\times4!} \times \frac{4\times3!}{3!\times1} = 15 \times 4 = 60 \text{ cara.}$$

c. kontingen memiliki paling sedikit 1 siswa putri

Banyaknya cara membentuk kontingen yang terdiri atas 5 siswa dengan semuanya putra adalah $C(6, 5)$

$$C(6,\ 5) = \frac{6!}{5!(6-5)!}$$

$$= \frac{6!}{5!\,(6-5)!} = \frac{10!}{5!\,.1!}$$

$$= \frac{6 \times 5!}{5!\,.1} = 6 \text{ cara.}$$

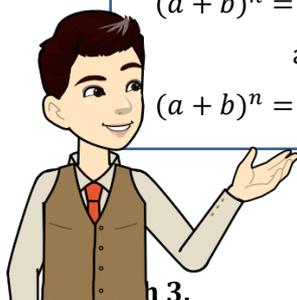
Banyaknya cara membentuk kontingen adalah $C(10, 5)$.

Jadi, banyaknya cara membentuk kontingen yang memiliki paling sedikit 1 siswa putri adalah

$$C(10, 5) - C(6, 5) = 252 - 6 = 246 \text{ cara}$$

## 2. Ekspansi Binomial

Penjabaran Binomial Newton berbentuk $(a + b)^n$, koefisien variabelnya dapat bersandarkan pada Segitiga Pascal atau konsep kombinasi.

**Teorema Binomial**

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,\ r)\, a^{n-r}.\, b^r,$$

atau dijabarkan:

$$(a+b)^n = C(n,0).\,a^n + C(n,1).\,a^{n-1}b^1 + C(n,2).\,a^{n-2}b^2 + \ldots + C(n,n).\,b^n$$

**h 3.**

Tentukan ekspansi dari $(2x + y^2)^5$.

***Jawab:***

$(2x+y^2)^5 = C(5,0)(2x)^5 + C(5,1)(2x)^4(y^2)^1 + C(5,2)(2x)^3(y^2)^2 + C(5,3)(2x)^2(y^2)^3$
$+ C(5,4)(2x)^1(y^2)^4 + C(5,5)(y^2)^5$
$= 1(32x^5) + 5(16x^4)(y^2) + 10(8x^3)(y^4) + 10(4x^2)(y^6) + 5(2x)(y^8) + 1(y^{10})$
$= 32x^5 + 80x^4y^2 + 80x^3y^4 + 40x^2y^6 + 10xy^8 + y^{10}$

**Contoh 4.**

Tentukan suku ketujuh dari ekspansi $(4x - y^3)^9$.

***Jawab***:

Bentuk umum ekspansi binomial $(a + b)^n$ terlebih dahulu diidentikkan dengan ekspansi binomial yang diketahui di soal untuk menentukan nilai-nilai $a$, $b$, dan $n$.

$(a + b)^n \equiv (4x - y^3)^9$, diperoleh $a = 4x$, $b = -y^3$ dan $n = 9$

Ditanyakan suku ketujuh, berarti $r = 7 - 1 = 6$,

Jadi, suku ketujuh : $C(n,\ r)\ a^{n-r}\ b^r = C(9,\ 6)\ (4x)^{9-6}\ (-y^3)^6$

$= \frac{9!}{6!.3!}\ (4x)^3\ (-y^3)^6$

$= 84.\ (64x^3)\ (y^{18}) = 5.376.x^3\ y^{18}$

## C. Rangkuman

- Kombinasi $k$ unsur dari $n$ unsur berbeda adalah sebuah jajaran dari $k$ unsur yang urutannya tidak diperhatikan.
- Misalkan $n$ dan $k$ bilangan bulat non negatif dengan $k \leq n$. Banyaknya kombinasi $k$ unsur dari $n$ unsur berbeda *tanpa pengulangan* ditentukan dengan rumus:
  $C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Ekspansi Binomial
  $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,\ r)\ a^{n-r}.\ b^r$,

  atau dijabarkan:

  $(a+b)^n = C(n,0).\ a^n + C(n,1).\ a^{n-1}b^1 + C(n,2).\ a^{n-2}b^2 + \ldots + C(n,n).\ b^n$

## D. Latihan Soal

1. Berapa banyak segitiga yang berbeda yang dapat dibentuk dengan menghubungkan diagonal-diagonal segi-10?
2. Seorang siswa diminta mengerjakan 7 soal dari 10 soal yang tersedia, dengan syarat nomor 1 sampai dengan nomor 5 harus dikerjakan. Berapa banyak pilihan yang dapat diambil oleh siswa tersebut?
3. Suatu tim bulu tangkis beranggotakan 5 pemain putra dan 3 pemain putri. Tentukanlah banyaknya tim:
   a. ganda putra yang dapat disusun.
   b. ganda campuran yang dapat disusun.

4. Pengurus inti kelas yang terdiri dari 4 siswa putra dan 3 siswa putri akan dipilih dari 7 siswa putra dan 5 siswa putri. Berapa banyak pilihan berbeda untuk membentuk pengurus inti kelas tersebut?
5. Sebuah kotak berisi 5 bola merah, 4 bola putih, dan 3 bola biru. Tiga bola diambil dari kotak tersebut.
   a. berapa banyak cara terambil 3 bola berwarna sama?
   b. berapa banyak cara terambil 1 bola putih dan 2 bola merah ?
6. Seorang ahli kimia memiliki 9 contoh larutan. Terdapat 4 jenis larutan A dan 5 jenis larutan B. Jika ahli kimia tersebut memilih tiga larutan secara acak, berapa cara ahli kimia tersebut akan mengambil lebih dari satu jenis larutan A?
7. Tentukan ekspansi dari $(2x - y^2)^6$.
8. Tentukan suku kelima dari ekspansi $(x + 2y)^{10}$.

## PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 3

1. Banyak segitiga yang berbeda yang dapat dibentuk dengan menghubungkan diagonal-diagonal segi-10 merupakan kombinasi 3 unsur dari 10 unsur atau C(10, 3), yaitu:

$$C(10,\ 3) = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10!}{3!\,.7!}$$
$$= \frac{10\times 9\times 8\times 7!}{3\times 2\times 1\ \times 7!} = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2}\ =\ 120$$

Jadi, banyak segitiga yang berbeda yang dapat dibentuk adalah 120 segitiga.

2. 7 soal harus dikerjakan dari 10 soal yang tersedia, dengan syarat nomor 1 sampai dengan nomor 5 harus dikerjakan.

Jika soal nomor 1 sampai 5 harus dikerjakan, berarti masih ada 2 soal lagi yang dapat dipilih dari 5 soal yang tersisa. Ini berarti kombinasi 2 unsur dari 5 unsur atau C(5, 2)

$$C(5,\ 2) = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,.3!}$$
$$= \frac{5\times 4\times 3!}{2\times 1\ \times 3!} = \frac{20}{2}\ =\ 10$$

Jadi, banyak pilihan yang dapat diambil oleh siswa tersebut adalah 10 pilihan.

3. Suatu tim bulu tangkis beranggotakan 5 pemain putra dan 3 pemain putri.
   a. Banyaknya tim ganda putra yang dapat disusun adalah kombinasi 2 unsur dari 5 unsur atau C(5, 2), yaitu

$$C(5,\ 2) = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,.3!}$$
$$= \frac{5\times 4\times 3!}{2\times 1\ \times 3!} = \frac{20}{2}\ =\ 10$$

   b. Banyaknya tim ganda campuran yang dapat disusun adalah kombinasi 1 putra dari 5 putra dikali dengan kombinasi 1 putri dari 3 putri atau C(5, 1) × C(3, 1)

$$C(5,\ 1)\times \mathrm{C}(3,1) = \frac{5!}{1!\,(5-1)!}\times\frac{3!}{1!\,(3-1)!}$$
$$= \frac{5!}{4!}\times\frac{3!}{2!} = 5\ \times 3 = 15$$

4. Pengurus inti kelas yang terdiri dari 4 siswa putra dan 3 siswa putri akan dipilih dari 7 siswa putra dan 5 siswa putri.

Banyak pilihan berbeda untuk membentuk pengurus inti kelas tersebut adalah

$$C(7,\ 4)\times \mathrm{C}(5,3) = \frac{7!}{4!\,(7-4)!}\times\frac{5!}{3!\,(5-3)!}$$
$$= \frac{7!}{4!\,.3!}\times\frac{5!}{3!\,.2!} = \frac{7.6.5.4!}{4!\,.3.2.1}\times\frac{5.4.3!}{3!\,.2.1}$$
$$= \frac{210}{6}\times\frac{20}{2} = 350$$

Jadi, banyak pilihan berbeda untuk membentuk pengurus inti kelas adalah 350 pilihan.

5. Sebuah kotak berisi 5 bola merah, 4 bola putih, dan 3 bola biru. Tiga bola diambil dari kotak tersebut.

a. Banyak cara terambil 3 bola berwarna sama berarti ketiga bola berwarna merah atau ketiga bola berwarna putih atau ketiga bola berwarna biru.

- 3 bola berwarna merah berarti C(5, 3) = $\frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!.2!} = \frac{5.4.3!}{3!.2.1} = \frac{20}{2} = 10$
- 3 bola berwarna putih berarti C(4, 3) = $\frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!.1!} = \frac{4.3!}{3!} = 4$
- 3 bola berwarna biru berarti C(3, 3) = $\frac{3!}{3!(3-3)!} = \frac{3!}{3!.0!} = \frac{3!}{3!.1} = 1$

Jadi, banyak cara terambil 3 bola berwarna sama adalah 10 + 4 + 1 = 15 cara.

b. Banyak cara terambil 1 bola putih dan 2 bola merah

$$C(4,\ 1) \times C(5, 2) = \frac{4!}{1!\,(4-1)!} \times \frac{5!}{2!\,(5-2)!}$$
$$= \frac{4!}{1!\,.3!} \times \frac{5!}{2!\,.3!} = \frac{4.3!}{3!} \times \frac{5.4.3!}{2.3!}$$
$$= 4 \times \frac{20}{2} = 40$$

Jadi, banyak cara terambil 1 bola putih dan 2 bola merah adalah 40 cara.

6. Banyak cara ahli kimia tersebut mengambil lebih dari satu jenis larutan A berarti ia mengambil 2 larutan A dan 1 larutan B atau ia mengambil 3 larutan A.

- Banyak cara mengambil 2 larutan A dan 1 larutan B adalah

$$C(4,\ 2) \times C(5, 1) = \frac{4!}{2!(4-2)!} \times \frac{5!}{1!(5-1)!}$$
$$= \frac{4!}{2!\,.2!} \times \frac{5!}{1!\,.4!} = \frac{4.3.2!}{2.2!} \times \frac{5.4!}{4!}$$
$$= 6 \times 5 = 30$$

- Banyak cara mengambil 3 larutan A adalah C(4, 3) = $\frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!.1!} = 4$

Jadi, banyak cara ahli kimia tersebut mengambil lebih dari satu jenis larutan A adalah 30 + 4 = 34 cara.

7. Tentukan ekspansi dari $(2x - y^2)^6$.

$(2x - y^2)^6 = C(6, 0)(2x)^6 + C(6, 1)(2x)^5(y^2)^1 + C(6, 2)(2x)^4(y^2)^2 + C(6, 3)(2x)^3(y^2)^3$
$+ C(6, 4)(2x)^2(y^2)^4 + C(6, 5)\ (2x)^1(y^2)^5 + C(6, 6)(y^2)^6$
$= 1(64x^6) + 6(32x^5)(y^2) + 15(16x^4)(y^4) + 20(8x^3)(y^6) + 15(4x^2)(y^8)$
$+ 6(2x)(y^{10}) + 1(y^{12})$
$= 64x^6 + 192x^5y^2 + 180x^4y^4 + 160x^3y^6 + 60x^2y^8 + 12x\,y^{10} + y^{12}$

8. Suku kelima dari ekspansi $(x + 2y)^{10}$.

Bentuk umum ekspansi binomial $(a + b)^n$ terlebih dahulu diidentikkan dengan ekspansi binomial yang diketahui di soal untuk menentukan nilai-nilai $a$, $b$, dan $n$.

$(a + b)^n \equiv (x + 2y)^{10}$ , diperoleh $a = x$, $b = 2y$ dan $n = 10$

Ditanyakan suku kelima, berarti $r = 5 - 1 = 4$,

Jadi, suku kelima : $C(n,\ r)\ a^{n-r}\ b^r = C(10,\ 4)\ (x)^{10-4}\ (2y)^4$

$= \frac{10!}{4!.(10-4)!}\ (x)^6\ (16y^4)$

$= 210.(x^6)\ (16y^4)\ =\ 3.360.x^6\ y^4$

## E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang Kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

| No | Pertanyaan | Ya | Tidak |
|---|---|---|---|
| 1 | Apakah Kalian tahu yang dimaksud kombinasi? | ○ | ○ |
| 2 | Apakah Kalian tahu yang dimaksud ekspansi binomial? | ○ | ○ |
| 3 | Apakah Kalian dapat mengindentifikasi masalah yang terkait dengan kombinasi? | ○ | ○ |
| 4 | Apakah Kalian dapat menyelesaikan permasalahan yang terkait kombinasi? | ○ | ○ |
| 5 | Apakah Kalian dapat menyelesaikan permasalahan yang terkait ekspansi binomial? | ○ | ○ |
| JUMLAH | | | |

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

# EVALUASI

1. Terdapat enam angka 1, 3, 4, 5, 7, 8 yang akan disusun menjadi bilangan yang terdiri dari 3 angka. Banyak bilangan ganjil yang dapat disusun dari angka-angka tersebut adalah ….
   A. 64
   B. 112
   C. 120
   D. 144
   E. 240

2. Jika setiap dua zat kimia yang berbeda dicampurkan menghasilkan zat kimia baru, dari enam zat kimia yang berbeda dapat membentuk zat baru sebanyak ….
   A. 12
   B. 15
   C. 20
   D. 24
   E. 32

3. Dari angka-angka 2, 3, 5, 6, 7, dan 9 akan dibuat bilangan tiga angka berlainan dan kurang dari 400. Banyak bilangan yang dapat dibuat adalah….
   A. 10
   B. 20
   C. 40
   D. 80
   E. 120

4. Suatu sekolah akan memilih pengurus OSIS yang terdiri atas ketua, wakil ketua, dan sekretaris. Jika tersedia 10 orang calon, banyak cara memilih pengurus OSIS adalah….
   A. 330 cara
   B. 440 cara
   C. 620 cara
   D. 660 cara
   E. 720 cara

5. Dari angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 akan dibuat bilangan kurang dari 500 yang terdiri dari tiga angka berlainan. Banyak cara menyusun bilangan-bilangan tersebut adalah….
   A. 80
   B. 120
   C. 150
   D. 180
   E. 200

6. Dari 6 orang akan dipilih menjadi satu tim yang terdiri dari seorang ketua, seorang sekretaris, dan satu orang anggota. Banyaknya susunan tim yang mungkin adalah….
   A. 30
   B. 80
   C. 120
   D. 210

E. 720

7. Dalam pemilihan murid teladan di suatu sekolah tersedia calon yang terdiri dari 5 orang putra dan 4 orang putri. Jika akan dipilih sepasang murid teladan yang terdiri dari seorang putra dan seorang putri, maka banyaknya pasangan yang mungkin terpilih adalah….
   A. 9
   B. 16
   C. 18
   D. 20
   E. 36

8. Nomor pegawai suatu pabrik terdiri atas tiga angka dengan angka pertama tidak nol. Banyak nomor pegawai yang ganjil adalah….
   A. 648
   B. 475
   C. 450
   D. 425
   E. 324

9. Zainal mempunyai koleksi 3 pasang sepatu dengan merk yang berbeda, 4 baju berlainan coraknya, dan 3 celana yang berbeda warna. Banyak cara berpakaian Zainal dengan penampilan yang berbeda adalah ….
   A. 36
   B. 24
   C. 21
   D. 12
   E. 10

10. Banyaknya susunan huruf-huruf yang dapat dibentuk dari kata “TUNTUT” adalah….
   A. 40
   B. 60
   C. 120
   D. 480
   E. 720

11. Diketahui ada 3 rute yang menghubungkan kota P dengan kota Q dan 2 rute yang menghubungkan kota Q dengan kota R. Banyak cara seseorang dapat bepergian dari kota P ke kota R adalah….
   A. 1 cara
   B. 3 cara
   C. 4 cara
   D. 6 cara
   E. 7 cara

12. Dari 9 siswa berprestasi akan dibuat tim yang terdiri dari 3 orang untuk mengikuti suatu lomba. Banyak kemungkinan susunan tim yang dapat disusun adalah….
   A. 84 tim
   B. 168 tim
   C. 240 tim

D. 504 tim
E. 1.008 tim

13. Amaliah memiliki 4 rompi, 2 celana panjang, dan 3 pasang sepatu. Amaliah memakai lengkap pasangan 1 rompi, 1 celana panjang, dan sepasang sepatu. Pasangan berbeda yang Amaliah punyai adalah….
A. 9
B. 12
C. 14
D. 24
E. 36

14. Empat siswa dan dua siswi akan duduk berdampingan. Apabila siswi selalu duduk paling pinggir, banyak susunan cara mereka duduk adalah….
A. 24
B. 48
C. 56
D. 64
E. 72

15. Andi akan menyusun bilangan yang terdiri dari 3 angka berbeda dan dipilih dari angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6. Bilangan tersebut habis dibagi 5. Banyak bilangan yang dapat disusun Andi adalah….
A. 48
B. 42
C. 36
D. 25
E. 20

16. Dua keluarga yang masing-masing terdiri dari 2 orang dan 3 orang ingin foto bersama. Banyak posisi foto yang berbeda dengan anggota keluarga yang sama selalu berdampingan adalah….
A. 24
B. 36
C. 48
D. 72
E. 96

17. Suatu menu makan malam terdiri dari masing-masing satu jenis sayur, lauk, buah, dan minuman. Jika terdapat 5 jenis sayur, 3 jenis lauk, 4 jenis buah, dan 3 jenis minuman, berapakah banyak menu makan malam yang dapat dipilih?
A. 120 menu
B. 150 menu
C. 180 menu
D. 210 menu
E. 270 menu

18. Sebuah kotak berisi 6 bola merah dan 4 bola putih. Dari dalam kotak diambil 3 bola sekaligus. Banyak cara pengambilan sedemikian hingga sedikitnya terdapat 2 bola putih adalah ….

A. 30
B. 36
C. 40
D. 48
E. 50

19. Dari angka-angka 0 sampai dengan 9 dan huruf-huruf A, I, U, E, O akan dibuat plat nomor suatu daerah yang terdiri dari 3 angka di depan dan 2 huruf di belakang dengan tidak ada angka dan huruf yang berulang. Banyak plat nomor yang dibuat adalah ….
    A. 50 buah
    B. 300 buah
    C. 10.080 buah
    D. 12.960 buah
    E. 14.450 buah

20. Suatu sekolah membentuk tim delegasi yang terdiri dari 4 anak kelas X, 5 anak kelas XI, dan 6 anak kelas XII. Kemudian akan ditentukan pimpinan delegasi yang terdiri dari ketua, wakil ketua, dan sekretaris. Jika kelas asal ketua kelas harus lebih tinggi dari kelas asal wakil dan sekretaris, maka banyaknya kemungkinan susunan pimpinan delegasi adalah ….
    A. 156
    B. 492
    C. 546
    D. 600
    E. 720

# KUNCI JAWABAN EVALUASI

1. D
2. B
3. C
4. E
5. A
6. C
7. D
8. C
9. A
10. B
11. D
12. A
13. D
14. B
15. E
16. A
17. C
18. C
19. D
20. B

# DAFTAR PUSTAKA


Abdur Rahman As'ari, dkk. 2018. *Matematika SMA/MA/SMK/MAK Kelas XII*. Jakarta: Kemendikbud.

Pradnyo Wijayanti, Sapon Suryopurnomo. 2018. *Kombinatorika, Peluang, dan Statistika*. Modul Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan Guru Matematika SMA. Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

Sukino. 2019. *Matematika SMA/MA Kelas XII IA* (*IPA*). Sidoarjo: PT. Masmedia Buasa Pustaka.